IV. Rozwiązania i wskazówki do ćwiczeń

1. Przykłady grup i podstawowe pojęcia

1.1. Zauważmy, że $T_{a,b} \circ T_{c,d}(x) = T_{a,b}(cx+d) = acx+ad+b = T_{ac,ad+b}(x)$. Stąd otrzymujemy $T_{a,b} \circ T_{c,d} = T_{ac,ad+b}$. Ponadto $T_{1,0}$ jest funkcją identycznościową oraz $T_{a,b}^{-1} = T_{a^{-1},-a^{-1}b}$. G jest zatem grupą (nieabelową). Pozostałe punkty wynikają bezpośrednio z powyższych zależności.

1.2. Mamy następujące zależności: $f^2(x,y) = f(-x,y) = (x,y)$, a więc $f^2 = \mathrm{id}$. Ponadto $g^2(x,y) = g(-y,x) = (-x,-y)$, $g^3(x,y) = g(g^2(x,y)) = g(-x,-y) = (y,-x)$ oraz $g^4(x,y) = g(g^3(x,y)) = g(y,-x) = (x,y)$. Stąd $g^4 = \mathrm{id}$ oraz $g^{-1} = g^3$.

Tak więc $f \circ g^{-1}(x,y) = f \circ g^3(x,y) = f(y,-x) = (-y,-x)$. Z drugiej strony $g \circ f(x,y) = g(-x,y) = (-y,-x)$, czyli $f \circ g^{-1} = g \circ f$. Wynika stąd, że każdy element grupy generowanej przez przekształcenia f i g można przedstawić w postaci $f^i \circ g^j$, gdzie $i = 0,1$ oraz $j = 0,1,2,3$. Jawne wzory dla ośmiu możliwych przekształceń pokazują, że są one różne, a więc G jest grupą rzędu 8. Bez trudu możemy zauważyć, że G jest izomorficzna z grupą diedralną D_4 – grupą izometrii własnych kwadratu.

1.3. Sugerujemy przeprowadzenie dowodu indukcyjnego. Z przemienności i łączności działania $*$ wynika krok indukcyjny:

$$(a*b)^{n+1} = (a*b)*(a*b)^n = (a*b)*(a^n*b^n) = (a*a^n)*(b*b^n) = a^{n+1}*b^{n+1}.$$

1.4. Niech $a,b \in G$. Z założenia wynika, że $(ba)^2 = a^2 = b^2 = e$, a więc korzystając z łączności, otrzymujemy

$$ab = ab(ba)^2 = ab^2aba = aeaba = a^2ba = eba = ba.$$

1.5. Rozważmy rodzinę wszystkich podzbiorów postaci $\{g, g^{-1}\}$, gdzie $g \in G$. Ponieważ $e = e^{-1}$, w rodzinie tej istnieją zbiory jednoelementowe. Liczba takich podzbiorów jest parzysta, więc istnieje taki element $x \neq e$, że $x = x^{-1}$. Wówczas $x^2 = e$.

1.6. Nieidentycznościowe elementy w S_4 są albo cyklami długości 2,3 lub 4, albo iloczynami dwóch rozłącznych cykli długości 2 (transpozycji). Cykle długości 3 mają rząd 3, a pozostałe permutacje mają rząd 2 lub 4. Tak więc równość $x^4 = e$ spełniają permutacje:

e, $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(3,4)$, $(1,2)(3,4)$, $(1,3)(2,4)$, $(1,4)(2,3)$, $(1,2,3,4)$, $(1,2,4,3)$, $(1,3,2,4)$, $(1,3,4,2)$, $(1,4,2,3)$, $(1,4,3,2)$.